Lösungen - Ableitungsregeln

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) Nach der Potenzregel wandert der Exponent 7 als Faktor nach vorne, der neue Exponent ist $7-1=6$. Also $f'(x)=7x^6$.
b) Der konstante Faktor 5 bleibt nach der Faktorregel stehen und wird mit dem Exponenten multipliziert: $g'(x)=5\cdot 4x^3=20x^3$.
c) Ebenso: $h'(x)=-2\cdot 3x^2=-6x^2$. Das Vorzeichen bleibt erhalten.
d) $k(x)=x=x^1$, also $k'(x)=1\cdot x^0=1$. Die Gerade $y=x$ hat überall die Steigung 1.
e) $m(x)=9$ ist konstant und ändert sich nie, deshalb ist $m'(x)=0$. Der Graph ist eine waagerechte Gerade.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Nach der Summenregel wird jeder Summand einzeln abgeleitet: $(x^3)'=3x^2$, $(-4x^2)'=-8x$, $(7x)'=7$, $(-2)'=0$. Also $f'(x)=3x^2-8x+7$.
b) $\left(\frac{1}{2}x^4\right)'=\frac{1}{2}\cdot 4x^3=2x^3$ und $(6x^2)'=12x$. Also $g'(x)=2x^3+12x$.
c) Summandenweise: $-5x^4$, $+9x^2$, -1. Also $h'(x)=-5x^4+9x^2-1$.
d) $0{,}2\cdot 3=0{,}6$ und $1{,}5\cdot 2=3$; die Konstante 4 fällt beim Ableiten weg. Also $k'(x)=0{,}6x^2-3x$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Umschreiben: $f(x)=x^{-1}$. Potenzregel: $f'(x)=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$.
b) $g(x)=3x^{-2}$, also $g'(x)=3\cdot(-2)x^{-3}=-6x^{-3}=-\frac{6}{x^3}$.
c) $h(x)=x^{1/2}$, also $h'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x>0$.
d) $k(x)=4x^{1/2}$, also $k'(x)=4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}=2x^{-1/2}=\frac{2}{\sqrt{x}}$.
e) $m(x)=2x^{-3}+x$, also $m'(x)=-6x^{-4}+1=-\frac{6}{x^4}+1$.
Merke: Die Potenzregel gilt für alle reellen Exponenten, also auch für negative und gebrochene. Wichtig ist nur, vorher konsequent in Potenzschreibweise umzuformen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Mit der binomischen Formel: $f(x)=(x+2)^2=x^2+4x+4$. Summandenweise abgeleitet: $f'(x)=2x+4$.
b) Ausmultiplizieren: $g(x)=x^2-4x$. Dann $g'(x)=2x-4$.
c) $(2x-1)(x+3)=2x^2+6x-x-3=2x^2+5x-3$. Also $h'(x)=4x+5$.
d) Erst die dritte binomische Formel: $(x-1)(x+1)=x^2-1$. Dann $(x^2-1)(x+2)=x^3+2x^2-x-2$. Also $k'(x)=3x^2+4x-1$.
Achtung: Die Ableitung eines Produkts ist nicht das Produkt der Ableitungen. Bei g wäre

$1 \cdot 1 = 1$ falsch.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$. Noch einmal ableiten: $f''(x) = 12x^2 - 12x$. Und noch einmal: $f'''(x) = 24x - 12$.
b) $g'(x) = x^2 + 2x - 5$, $g''(x) = 2x + 2$, $g'''(x) = 2$. Ab der vierten Ableitung ist alles 0.
c) $h'(x) = 10x^4$, $h''(x) = 40x^3$, $h'''(x) = 120x^2$.
Bei jeder Ableitung sinkt der Grad einer ganzrationalen Funktion um 1.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Zuerst die Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. Dann $f'(0) = 2 > 0$: Der Graph steigt bei $x_0 = 0$ mit Steigung 2.
b) $f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$: Der Graph fällt bei $x_0 = 1$.
c) $f'(2) = 12 - 12 + 2 = 2 > 0$: Der Graph steigt bei $x_0 = 2$.
d) $f'(-1) = 3 + 6 + 2 = 11 > 0$: Der Graph steigt bei $x_0 = -1$ sogar sehr steil.
Das Vorzeichen von $f'(x_0)$ entscheidet: positiv heißt steigend, negativ heißt fallend.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Starthöhe: $h(0) = 20$ m. Nach vier Minuten:
$h(4) = -\frac{1}{2} \cdot 16 + 24 + 20 = -8 + 24 + 20 = 36$ m.
b) $h'(t) = -t + 6$. $h'(2) = 4$: Nach zwei Minuten steigt der Ballon momentan mit 4 Metern pro Minute.
c) Waagerechte Tangente bei $h'(t) = 0$: $-t + 6 = 0 \Rightarrow t = 6$. Dann ist $h(6) = -18 + 36 + 20 = 38$ m. Der Ballon steigt nach 6 Minuten nicht mehr und erreicht seine größte Höhe von 38 m.
d) Der Ballon sinkt, wenn $h'(t)$ ist, also für $-t + 6$, d. h. $t > 6$. Ab der sechsten Minute sinkt er.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges: $v(t) = s'(t) = 0{,}15t^2 - 1{,}8t + 6$ (Hundert Meter pro Minute).
b) $v(5) = 0{,}15 \cdot 25 - 9 + 6 = 0{,}75$. Das sind 75 m/min, also $75 \cdot 60 = 4500$ m/h $= 4{,}5$ km/h.
c) $a(t) = v'(t) = 0{,}3t - 1{,}8$. Die Geschwindigkeit ist am kleinsten, wo $v'(t) = 0$: $0{,}3t = 1{,}8 \Rightarrow t = 6$ Minuten. Da v eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt dort das Minimum.
d) $v(6) = 0{,}15 \cdot 36 - 10{,}8 + 6 = 0{,}6$, also 60 m/min $= 3{,}6$ km/h. Lena ist nach 6 Minuten am langsamsten, vermutlich an einer Steigung.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Die Fixkosten fallen auch ohne Produktion an: *K(0)=60\,€*.

b) Die Grenzkosten sind die Ableitung: $K'(x) = 0{,}1x + 2$. *K\,'(20)=2+2=4\,€*: Der 21. Liter kostet ungefähr *4\,€* zusätzlich.
c) $0{,}1x + 2 = 5 \Rightarrow 0{,}1x = 3 \Rightarrow x = 30$. Bei 30 Litern betragen die Grenzkosten genau *5\,€*.
d) *K\,'(30)=5\,€*. Ein zusätzlicher Liter bringt *6{,}50\,€* Erlös und kostet etwa *5\,€*. Da 5, lohnt sich ein zusätzlicher Liter: Er bringt etwa *1{,}50\,€* Gewinn.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Bedingung: $f'(x) = 0$. $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$. Der y-Wert: $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Waagerechte Tangente im Punkt $P(3\,|\,-4)$, dem Scheitelpunkt.
b) $g'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. $g(2) = 8 - 24 = -16$ und $g(-2) = -8 + 24 = 16$. Punkte $(2\,|\,-16)$ und $(-2\,|\,16)$.
c) $h'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0$. Nach dem Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x = \pm 2$. $h(0) = 0$, $h(\pm 2) = 4 - 8 = -4$. Punkte $(0\,|\,0)$, $(2\,|\,-4)$, $(-2\,|\,-4)$.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Mit der Faktorregel: $h'(x) = \frac{1}{40} \cdot 2x = \frac{1}{20}x = 0{,}05x$.
b) $h'(10) = 0{,}5 = 50\,\%$, $h'(20) = 1 = 100\,\%$, $h'(40) = 2 = 200\,\%$. Die Rampe wird also immer steiler.
c) Steigung $100\,\%$ heißt $h'(x) = 1$: $\frac{x}{20} = 1 \Rightarrow x = 20$ m. Dort ist die Bahn 45° steil, denn $\tan 45^\circ = 1$.
d) Bei $x = 0$ ist $h'(0) = 0$. Die Parabel hat dort ihren Scheitel und berührt den Boden waagerecht, darum beginnt die Rampe flach.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $-\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 25) + 5 = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 5 + 5 = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$. Also $f'(x) = -\frac{2}{5}x + 2$.
b) $f(1) = -\frac{1}{5} + 2 = 1{,}8$ m und $f'(1) = -\frac{2}{5} + 2 = 1{,}6$. Im Punkt $P(1\,|\,1{,}8)$ steigt der Bogen mit $160\,\%$.
c) Punkt-Steigungs-Form: $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1{,}6(x - 1) + 1{,}8 = 1{,}6x + 0{,}2$. Die Tangente lautet $t(x) = 1{,}6x + 0{,}2$.
d) Höchster Punkt bei $f'(x) = 0$: $-\frac{2}{5}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 5$. $f(5) = 5$ m, also liegt der Scheitel bei $(5\,|\,5)$. Das passt zur Scheitelpunktform.

Lösung zu Aufgabe 13

a) 8 Uhr heißt $t = 8$: $T(8) = -16 + 48 - 20 = 12$ °C. 12 Uhr: $T(12) = -36 + 72 - 20 = 16$ °C.
b) $T'(t) = -\frac{1}{2}t + 6$. $T'(8) = -4 + 6 = 2$: Um 8 Uhr steigt die Temperatur um 2 °C pro Stunde.
c) Am wärmsten bei $T'(t) = 0$: $-\frac{1}{2}t + 6 = 0 \Rightarrow t = 12$. Um 12 Uhr ist es mit $T(12) = 16$ °C am wärmsten.

d) Für $t > 12$ ist $T'(t)$. Ab 12 Uhr kühlt das Gewächshaus also ab.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Zu Beginn ist $t = 0$: $V(0) = 2000$ Liter.
b) Die Änderungsrate ist die Ableitung: $V'(t) = -40 + \frac{2}{5}t$ Liter pro Minute. Das Minuszeichen zeigt, dass das Volumen abnimmt.
c) $V'(10) = -40 + 4 = -36$. Nach 10 Minuten fließen also 36 Liter pro Minute ab.
d) $-40 + 0{,}4t = 0 \Rightarrow t = 100$. Nach 100 Minuten fließt nichts mehr ab. Wegen $V(100) = 2000 - 4000 + 2000 = 0$ ist das Becken dann genau leer.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $G(2) = -8 + 48 - 40 = 0$, $G(4) = -32 + 96 - 40 = 24$, $G(6) = -72 + 144 - 40 = 32$, $G(8) = -128 + 192 - 40 = 24$, $G(10) = -200 + 240 - 40 = 0$. Alle Tabellenwerte stimmen.
b) $G'(x) = -4x + 24$. $G'(x) = 0 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$.
c) Bei $x = 6$ wechselt G' von positiv zu negativ, dort ist der Gewinn maximal: 600 Brezeln bringen *G(6)=32\,€* Gewinn.
d) Nein. 1000 Brezeln entsprechen $x = 10$, und *G(10)=0\,€*. Nach dem Maximum fällt der Gewinn, weil die Kosten schneller wachsen als die Einnahmen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Position: $v_1(t) = 20$ m/s (konstant) und $v_2(t) = 2t + 5$ m/s (zunehmend).
b) $2t + 5 = 20 \Rightarrow 2t = 15 \Rightarrow t = 7{,}5$ s. Dann fahren beide mit 20 m/s.
c) $s_1(7{,}5) = 150$ m und $s_2(7{,}5) = 56{,}25 + 37{,}5 = 93{,}75$ m. Das erste Auto liegt $150 - 93{,}75 = 56{,}25$ m vorn.
d) Einholen heißt gleiche Position: $t^2 + 5t = 20t \Rightarrow t^2 - 15t = 0 \Rightarrow t(t - 15) = 0$. Also $t = 15$ s. Dann sind beide bei $s = 300$ m.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $p(5) = 2{,}5 + 5 = 7{,}5$, $p(10) = 10 + 10 = 20$, $p(15) = 22{,}5 + 15 = 37{,}5$. Alle Werte stimmen mit der Tabelle überein.
b) Mittlere Rate: $\frac{20 - 7{,}5}{10 - 5} = 2{,}5$ cm pro Tag. Mit $p'(t) = 0{,}2t + 1$ gilt $p'(5) = 2$ und $p'(10) = 3$. Die mittlere Rate liegt zwischen den beiden momentanen Raten.
c) $0{,}2t + 1 = 4 \Rightarrow 0{,}2t = 3 \Rightarrow t = 15$. Am Tag 15 wächst die Pflanze mit 4 cm pro Tag.
d) p' wächst immer weiter, die Pflanze würde also immer schneller wachsen. Nach einem Jahr wäre sie über 130 m hoch. Echte Pflanzen erreichen eine Grenzhöhe.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $h'(x) = -\frac{3}{150}x^2 + \frac{2}{10}x = -\frac{x^2}{50} + \frac{x}{5} = \frac{x(10 - x)}{50}$.
b) $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x(10 - x) = 0$, also $x = 0$ oder $x = 10$.

c) $h(0) = 2$ m. $h(10) = -\frac{1000}{150} + 10 + 2 = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$ m (höchster Punkt).
$h(15) = -22{,}5 + 22{,}5 + 2 = 2$ m.
d) $h'(5) = \frac{5 \cdot 5}{50} = 0{,}5$, also $50\,\%$ Steigung. $h'(15) = \frac{15 \cdot (-5)}{50} = -1{,}5$, also $150\,\%$ Gefälle.
Am Ende ist die Bahn sehr steil.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Mit den Binomialkoeffizienten $1, 4, 6, 4, 1$: $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$.
b) Nach Subtraktion von x^4 bleibt $4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$. Jeder Summand enthält h, also darf man kürzen: $4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$.
c) Für $h \to 0$ gehen alle Summanden mit h gegen 0. Es bleibt $f'(x) = 4x^3 = 4 \cdot x^{4-1}$.
Das ist genau die Potenzregel.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $f(1) = a + b = -2$. Mit $f'(x) = 3ax^2 + b$ folgt $f'(1) = 3a + b = 1$.
b) Zweite minus erste Gleichung: $2a = 3$, also $a = \frac{3}{2}$. Eingesetzt: $b = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$.
c) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{2}x$ und $f'(x) = \frac{9}{2}x^2 - \frac{7}{2}$. Probe: $f(1) = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2$ und $f'(1) = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = 1$. Beide Bedingungen sind erfüllt.